****

**Hogeschool UCLL**

**Educatieve Bachelor Secundair Onderwijs**

**Campus Diepenbeek**

***Artificiële intelligentie in de wiskundeles***

**STEM-project**   
*Geïntegreerd Onderzoek, Ontwikkeling, Onderwijs*

Promotor:

Mieke Schuermans

Studenten:

Max Broux

Sven Baens

Inhoudsopgave

[1. Hoe werkt AI? 1](#_Toc168066118)

[1.1 Algoritmen 1](#_Toc168066119)

[1.2 Beslissingsbomen 3](#_Toc168066120)

[1.3 Machine learning 3](#_Toc168066121)

[1.3.1 Supervised learning 3](#_Toc168066122)

[1.3.2 Reinforced learning 3](#_Toc168066123)

[1.3.3 Unsupervised learning 4](#_Toc168066124)

[1.4 Deep learning 4](#_Toc168066125)

[1.4.1 de werking van je eigen grijze massa 4](#_Toc168066126)

[1.4.2 de werking van deep learning 4](#_Toc168066127)

[1.4.3 toepassingen van deep learning 5](#_Toc168066128)

[2. Prompt engineering 6](#_Toc168066129)

[2.1 Wat is een prompt? 6](#_Toc168066130)

[2.2 Prompting voor taalgeneratie 6](#_Toc168066131)

[2.3 Voorbeeld om je prompt beter te maken 7](#_Toc168066132)

[2.4 Voer een gesprek 8](#_Toc168066133)

[3. Tips and tricks om ChatGPT te gebruiken 9](#_Toc168066134)

[4. Driehoeksmeetkunde in een rechthoekige driehoek 11](#_Toc168066135)

[4.1 Rechthoekige driehoeken oplossen 11](#_Toc168066136)

[5. Algemene goniometrie 17](#_Toc168066137)

[5.1 Verband tussen sinus, cosinus en tangens van een hoek 17](#_Toc168066138)

[5.2 Grondformule 18](#_Toc168066139)

[5.3 Oefeningen 21](#_Toc168066140)

**Afbeelding met tekst, diagram, Lettertype, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijvingconceptenmap**

# Hoe werkt AI?

## Algoritmen

Een algoritme is een stappenplan bestaande uit een set regels in vaste volgorde om tot een oplossing te komen en het einddoel te bereiken. Enkele bekende voorbeelden zijn: het boekje bij LEGO, de bouwtekening bij een IKEA-kast, het bakken van pannenkoeken,…

Neem nu het voorbeeld van het pannenkoeken bakken. Hieronder zien we de 6 stappen die hiervoor doorlopen worden, zet deze in de juiste volgorde.

Afbeelding met ei, ingrediënt, voedsel, Mengkom

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met Snack, pannenkoek, voedsel, Fastfood

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met kom, Keukengerei, beslag, Mengkom

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met Kook- en bakgerei, voedsel, braadpan, Bakken in een pan

Automatisch gegenereerde beschrijving

Afbeelding met Kook- en bakgerei, melkproducten, kaas, keukenaccessoires

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met Kook- en bakgerei, braadpan, keukenaccessoires, koken

Automatisch gegenereerde beschrijving

We kunnen dit algoritme ook uitbreiden, dit kan op verschillende manieren. Stel dat je mama olijfolie gebruikt in de plaats van boter. In dit geval gaan we een extra stap zetten op de plaats van de boter, je hebt dan de keuze of ik gebruik boter of ik gebruik olijfolie.

Afbeelding met voedsel

Automatisch gegenereerde beschrijving

We zouden nog verder kunnen gaan! Stel dat je geen eieren in huis hebt. Je moet dan eerst naar de winkel gaan om eieren te kopen. Deze stap komt dan eigenlijk tussen het verzamelen van de ingrediënten en het mengen van het beslag.

Afbeelding met voedsel

Automatisch gegenereerde beschrijving

We zouden nog verder kunnen gaan! Het gegeven van naar de winkel gaan kunnen we ook in een algoritme toevoegen, je loopt namelijk eerst naar de garage voor je fiets, waarna je naar de winkel fietst, enz.

## Beslissingsbomen

Een beslissingsboom geeft inzicht in hoe een computer keuzes maakt op basis van algoritmen. Een eenvoudig voorbeeld is een beslissingsboom voor het spel boter-kaas-en-eieren.

Afbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met symbool, Graphics, clipart, ontwerp

Automatisch gegenereerde beschrijving

Bij het spel boter-kaas-en-eieren zet de ene speler een kruisje in een willekeurig leeg vakje en de andere speler een bolletje. De bedoeling van het spel is om drie kruisjes of drie bolletjes op een rij te krijgen

Afbeelding met schets, tekening, Kinderkunst, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

## Machine learning

Machine learning is het leren uit de voorbeelden die computers gezien hebben. Er zijn drie manier van leren:

### Supervised learning

Een voorbeeld hiervan is in groepen indelen.

Dit wordt toegepast in bijvoorbeeld een spamfilter. Dankzij dit systeem hoef je niet zelf alle spam uit je inbox te verwijderen, maar wordt dat voor jou gedaan.

### Reinforced learning

Dit is leren door trial-and-error, door gebruik te maken van de feedback uit de acties van de computer.

### Unsupervised learning

Het kan afwijkende patronen in je gegevens opsporen, zonder te weten of iets goed of fout is. Het model vormt de groepjes zelf op basis van patronen in de gegevens.

Dit kom je vooral tegen bij suggesties van welke Instagram-account of welk YouTube-filmpje óók interessant voor jou kan zijn.

Daarnaast wordt dit op facebook en nieuwssites gebruikt, waardoor je alleen nog maar informatie ziet die overeenkomt met jouw persoonlijke voorkeuren en standpunten.

## Deep learning

De werking van deep learning is te vergelijken met de werking van de menselijke hersenen.

We bespreken hiervan 4 onderdelen.

### 1.4.1 **de werking van je eigen grijze massa**



Huis van oma +

Nostalgisch gevoel

Input output

Je neemt een huis waar. Dat is de input. In je hersenen verandert de visuele input razendsnel van vormen en kleuren naar een huis en uiteindelijk naar een plek met een gedachte en een gevoel. Het huis laat je denken aan het huis van je oma en je voelt je nostalgisch. Dat is je output.

### de werking van deep learning

Een systeem krijgt gegevens aangeboden, dat is de input. Deze input wordt verwerkt, het wordt afgebroken in de gegevens die door verschillende lagen heen gaan en steeds meer betekenis en waarde krijgen. Op basis van wat het systeem heeft waar genomen en geleerd, trekt het een conclusie en doet een voorspelling. Dat is de output.

Afbeelding met tekst, Lettertype, Rechthoek, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

### Afbeelding met schets, tekening, Kinderkunst, lijn Automatisch gegenereerde beschrijving1.4.3 toepassingen van deep learning

* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

# Prompt engineering

## 2.1 Wat is een prompt?

Een prompt is een instructie of vraag die je aan een AI-tool zoals bijvoorbeeld ChatGPT geeft om een specifiek antwoord te krijgen. Deze prompt wordt door de AI-tool als hulpmiddel gebruikt om een passend antwoord te geven. Daarom is het belangrijk om een goede, zo gericht mogelijke prompt te ontwikkelen om de gewenste informatie te krijgen, terwijl een onduidelijke of onvolledige prompt kan leiden tot ongewenste informatie.

Een prompt vormt de basis om met AI-tools te werken en zal de komende jaren steeds belangrijker worden om te leren.

Een prompt dient specifiek te zijn. ‘Wat is fotosynthese?’ is geen goede prompt, want deze vraag is niet specifiek genoeg. In dit geval kan je beter kiezen voor de volgende prompt: ‘Leg uit wat fotosynthese is, waarbij je de belangrijkste stappen in simpele taal toelicht. Maak belangrijke begrippen vetgedrukt en schrijf achter elk begrip tussen haakjes en cursief een korte definitie. De doelgroep bestaat uit leerlingen van 12-13 jaar.’

## 2.2 Prompting voor taalgeneratie

Het schrijven van goede prompts is een van de belangrijkste onderdelen om te werken met AI in het onderwijs. Om betere prompts te schrijven, moet je de volgende uitgangspunten in gedachten houden:

1. **Wees specifiek:** schets de context. Geef zo veel mogelijk details over wat je vraagt om een relevant antwoord te krijgen.
2. **Wees beknopt:** houd prompts kort, bondig en to-the-point en focus op de belangrijkste informatie.
3. **Geef achtergrondinformatie:** voeg informatie toe om het model te helpen betere antwoorden te genereren.
4. **Gebruik natuurlijke taal:** gebruik correcte grammatica en zinsstructuur voor je prompts.
5. **Vermijd dubbelzinnigheid:** vermijd vaag taalgebruik of onvolledige zinnen waarbij meerdere interpretaties mogelijk zijn.
6. **Stel open vragen:** gesloten vragen geven meestal niet het gewenste antwoord en beperken de mogelijkheden om een gedetailleerd antwoord te geven.
7. **Gebruik modeling:** geef het taalmodel een voorbeeld van hoe je wilt dat het redeneert voordat je je prompt ingeeft.
8. **Voeg een negatieve prompt toe:** beschrijf naast de instructie over wat je wilt dat het taalmodel doet, ook wat je ***niet*** wilt dat het doet. Dit noem je een negatieve prompt.
9. **Houd rekening met de taal die je gebruikt:** het is belangrijk om stil te staan bij de taal die een bepaald systeem spreekt.

## 2.3 Voorbeeld om je prompt beter te maken

Hieronder staan verschillende prompts, deze zijn telkens een beetje verbetert. Schrijf bij iedere prompt het antwoord dat je verkrijgt, probeer telkens te onderscheiden als het antwoord beter is dan het vorige!

1. **Stelling van Pythagoras**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

1. **Leg me de stelling van Pythagoras uit.**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Is dit antwoord beter?\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. **Leg me de stelling van Pythagoras uit voor een leerling van 14-15 jaar.**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Is dit antwoord beter?\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. **Leg me de stelling van Pythagoras uit voor een leerling van 14-15 jaar en geef er een voorbeeld bij.**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Is dit antwoord beter?\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. **Leg me de stelling van Pythagoras uit voor een leerling van 14-15 jaar en geef er een voorbeeld bij. Gebruik een synoniem voor het woord hypotenusa.**

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Is dit antwoord beter?\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

## 2.4 Voer een gesprek

Een AI-tool kan een sterk hulpmiddel zijn, maar geeft niet altijd de gewenste resultaten bij de eerste poging. De sleutel tot succes is een interactief proces waarbij je steeds dichter bij het gewenste antwoord komt. Dit kan ook op een menselijke manier gebeuren en dat maakt het wel leuk. Hiermee bedoelen we dat je in een interactief proces een menselijke toon aanhoudt en werkt met beleefdheden zoals ‘dankjewel’ en ‘alsjeblieft’. De interactie is hierdoor aangenamer en verrassend effectief.

Met deze aanpak geef je het taalmodel feedback. Door feedback begrijpt het taalmodel beter wat je zoekt en kan het de kwaliteit van het antwoord optimaliseren. Er zijn een aantal manieren om dit te doen:

1. **Opnieuw en opnieuw:** geef concrete feedback over wat je wel en niet goed vond aan het antwoord. Zo kan het taalmodel het antwoord aanpassen op basis van jouw voorkeuren.
2. **Vraag om verduidelijking:** neem de tijd om vervolgvragen te stellen als de output niet duidelijk is. Daardoor kan de chatbot een bepaald voorbeeld uitleggen dat relevant is voor jou vraag en begrijp je de output ook beter.
3. **Vraag om variaties:** als je niet zeker bent over wat er moet veranderen, maar het antwoord bijna is wat je wilt, vraag dan om variaties. Geef meer details over wat je wilt zien in deze variaties. Het taalmodel zal dan verschillende alternatieven genereren waaruit je kunt kiezen.
4. **Behoud het goede:** als een deel van het antwoord goed is, geef dan duidelijk aan welk deel aangepast moet worden en wat onveranderd moet blijven. Dit helpt het taalmodel om concrete verbeteringen te doen zonder de rest van het antwoord aan te passen.
5. **Voeg uitleg toe:** een taalmodel kan ook uitleg geven over gemaakte keuzes. Vraag om feedback, definities toe te voegen of gedetailleerde opmerkingen te maken zodat je weet waarom bepaalde dingen aangepast zijn.
6. **Maak de output langer of korter:** als de output te kort of te lang is, vraag dan om deze compacter of uitgebreider te maken. Let hierbij wel op welke delen van de tekst behouden moeten blijven, zoals de structuur of inhoud.

We moeten onthouden dat taalmodellen niet altijd in één keer de gewenste output zullen geven. Vaak komt het zelfs voor dat je onverwachte of vreemde antwoorden krijgt, vooral bij open of complexere vragen. Beschouw dit als een kans om de output steeds te verfijnen en te verbeteren. Het is dan ook deze interactie die kan leiden tot nieuwe, creatieve output.

# Tips and tricks om ChatGPT te gebruiken

* Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype

  Automatisch gegenereerde beschrijvingGeef aan hoe de chatbot zich moet gedragen. Door ‘gedraag je als (functie of persoon)’ te gebruiken is het meteen duidelijk hoe ChatGPT het antwoord moet formuleren. *Een voorbeeld hiervan is het volgende: Gedraag je als een leraar wiskunde. Geef mij 10 voorbeeldvragen voor een examen Wiskunde over tweedegraadsfuncties.*

*Afbeelding met schets, tekening, Kinderkunst, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving*

Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijvingVergelijk het antwoord hierboven met het volgende antwoord dat we krijgen als de chatbot zich gedraagt als een leerkracht wiskunde.

* Stel duidelijke en specifieke vragen. Gebruik korte zinnen die makkelijk te begrijpen zijn.
* Vermijd ja/nee vragen en best ook ‘wat is ….’ vragen. Hierop krijg je meestal een te algemeen antwoord. Als je dit wel wilt doen, is het goed om de vraag te specifiëren zodat je een duidelijker antwoord krijgt.
* Kies makkelijk begrijpbare woorden. Bij moeilijke woorden is er een kans dat de chatbot ze verkeerd gaat interpreteren.
* De chatbot kan een beter antwoord geven als je meer context geeft, maar doe dit zo veel mogelijk in korte zinnen.
* Vermijd overbodige woorden zoals: eigenlijk, heel en gewoon. Signaalwoorden hebben ook geen meerwaarde voor de bot.
* Zorg ervoor dat spelling en grammatica in orde is. Fouten in de vraag kan ook leiden tot fouten in het antwoord.
* Een nieuwe conversatie kent geen context en moet dus opnieuw gecreëerd worden.
* Afbeelding met tekst, schermopname, Lettertype, nummer

  Automatisch gegenereerde beschrijvingGeef custom instructions in. Op deze manier moet je niet telkens opnieuw je voorkeuren doorgeven.

# Driehoeksmeetkunde in een rechthoekige driehoek

In dit hoofdstuk gaan we het hebben over de driehoeksmeetkunde in rechthoekige driehoeken. We beginnen met een opfrissing van de goniometrische verhoudingen en enkele startersoefeningen. Daarna zullen we verder gaan met toepassingen van goniometrie in vlakke figuren gevolgd door gemengde oefeningen.

## Rechthoekige driehoeken oplossen

* 1. **Goniometrische verhoudingen**

We starten met een herhaling van de theorie die jullie al eens gezien hebben!

|  |  |
| --- | --- |
| Meetbare waarden in een driehoek:   * Drie zijden: a, b, c * Drie hoeken:     Gebruik altijd de gegeven waarden! | Goniometrische verhoudingen:   * Sin = = * Cos = = * Tan = =   Opmerking:   * 0 < sin < 1 * 0 < cos < 1   Dit is zo omdat de schuine zijde van een rechthoekige driehoek altijd groter is dan de rechthoekzijden. |

Afbeelding met tekenfilm, poster, tekening, clipart

Automatisch gegenereerde beschrijving

Weetje:

Goniometrie is afgeleid van de Griekse woorden:

* “Gonio”: “Γονιο” (hoek)
* “Metrein“: “μητραί (meten)

Afbeelding met schets, tekening, Kinderkunst, lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

* 1. **Startersoefeningen**

Jullie hebben ondertussen al gewerkt rond de goniometrische getallen in een rechthoekige driehoek, op de vorige pagina hebben jullie de theorie nog eens een keer herhaald. We gaan dit nog even opfrissen met enkele oefeningen!

Probeer onderstaande oefeningen op te lossen, bekijk heel goed welke gegevens je hebt en wat er gevraagd is!

Bereken hoek :

Afbeelding met lijn

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met lijn

Automatisch gegenereerde beschrijving

Bereken de onbekende zijde x:

Afbeelding met lijn, Lettertype, diagram, Perceel

Automatisch gegenereerde beschrijvingAfbeelding met lijn, diagram

Automatisch gegenereerde beschrijving

* 1. **Toepassingen in vlakke figuren**

Bepaal de hoek die een balk van 3 meter maakt met de muur als je weet dat de balk onderaan 70cm van de muur verwijderd is. Op welke hoogte leunt de balk tegen de muur?

Afbeelding met lijn

Automatisch gegenereerde beschrijvingGegeven: Maak altijd een tekening!

Gevraagd: |FA| = ?, = ?

Oplossing: |DF|2 = |DA|2 + |AF|2

32 = 0.72 + |AF|2

9 = 0.49 + |AF|2

9 – 0.49 = |AF|2

8.51 = |AF|2

|AF| =

|AF| 2.92

= sin-1

= 13°29’36”

* 1. **Oefeningen**: maak indien je het moeilijk vindt gebruik van ChatGPT om de formules om te vormen, denk er wel aan op de toets moet je dit zonder kunnen!

1. Bereken met behulp van de stelling van Pythagoras in een rechthoekige driehoek ABC met = 90° de ontbrekende zijde op 0,01 nauwkeurig.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **a** | **b** | **c** | **berekening** |
|  | 28 | 37 |  |
| 75 |  | 27 |  |
| 164 | 125 |  |  |

1. Afbeelding met lijn

   Automatisch gegenereerde beschrijvingBereken de ontbrekende zijden en hoeken.

= 90°

|AC| = 2cm

|CD| = 3 cm

Gevraagd:

en |AD|

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

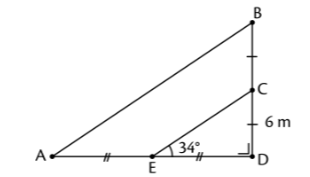
\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Gegeven is de vierhoek PQRS, deze is een ruit met de grote diagonaal |PR| = 7cm en kleine diagonaal van 4cm.

Bereken de scherpe hoek van deze ruit.

1. Gegeven is onderstaande figuur.

Bereken uit deze figuur |AB| tot op 0,01 nauwkeurig.



1. Je wandelt 350m op een helling met hellingshoek 31,67°. Hoeveel meter ben je gestegen?

Maak een tekening en vul de gegevens aan.

Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, helling

Automatisch gegenereerde beschrijving

1. Louis staat op 10m voor een appartementsgebouw in aanbouw. Hij ziet de top van het bouwwerk onder een hoek van 32°. ’s Anderendaags gaat hij op dezelfde plaats staan. Nu ziet hij de top van het gebouw onder een hoek van 42°.

Hoeveel meter werd er hoger gebouwd dan de dag ervoor?

Maak een tekening en bereken tot op 0,01m nauwkeurig

Afbeelding met lijn, Perceel, diagram, helling

Automatisch gegenereerde beschrijving

1. Een deur van 90cm breed draait open in een gang van 80cm breed.
   1. Bereken hoeveel graden de deur maximaal kan opendraaien.
   2. Op hoeveel cm van het einde van de gang raakt de deur de overstaande muur?

Afbeelding met lijn, diagram, Perceel

Automatisch gegenereerde beschrijving

# Algemene goniometrie

De goniometrische verhoudingen zijn nog eens opgefrist en herhaalt a.d.h.v. verschillende oefeningen. We gaan verder met een verband tussen de sinus, cosinus en tangens van een hoek. Er wordt kennis gemaakt met het begrip grondformule en een toepassing hierop.

## Verband tussen sinus, cosinus en tangens van een hoek

**Afbeelding met lijn

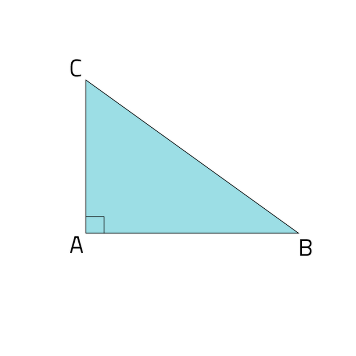
Automatisch gegenereerde beschrijving**

sin = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

cos = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

⇒ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Besluit**: In een rechthoekige driehoek is de tangens van een scherpe hoek gelijk aan het quotiënt van de sinus en de cosinus van die scherpe hoek.



tan =

tan =

Overzicht:

Afbeelding met tekst, tekenfilm, Tekenfilm, illustratie

Automatisch gegenereerde beschrijving

**Startoefening**

**Oefening 1:** markeer alle ware uitspraken.

tan 35° = cos 29° = tan 84 =

sin 15° = cos 56° = sin 44° = cos 44° . tan 44°

cos 22° = sin 22° . tan 22° tan 67° = =

## Afbeelding met schets, tekening, Kinderkunst, lijn Automatisch gegenereerde beschrijving Grondformule

**Afbeelding met lijn, driehoek

Automatisch gegenereerde beschrijving**

b2 + c² = a² (stelling van Pythagoras in Δ ABC)

⇔ + =

⇔ + = 1

⇔ (sin )² + (cos )² = 1 of (cos )² + (sin )² = 1

Of:

Notatie: (sin )² = sin²

sin² B + cos² B = 1 of cos² C + sin² C = 1

**Grondformule goniometrie:** vraag aan ChatGPT om de definitie van de grondformule in 1 zin uit te leggen. Controleer je antwoord met hetgeen dat in het kader hieronder staat en met wat reeds bewezen is!

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

sin² + cos² = 1 of cos² + sin² = 1

**Voorbeelden:** ga met behulp van ChatGPT op zoek naar 2 voorbeelden van de grondformule.

* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
* \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Toepassing:**

1. **Met de grondformule**

**Gegeven:** sin =

**Gevraagd:** bereken cos en tan zonder rekenmachine.

**Oplossing:** sin² + cos² = 1 grondformule

⇔ cos² = 1 - sin²

⇔ cos = want 0◦ < B­ < 90 dus cos ­ > 0

⇔ cos =

⇔ cos =

⇔ cos =

Er geldt: tan = = =

1. **Met de stelling van Pythagoras**

**Gegeven:** sin =

**Gevraagd:** bereken cos en tan zonder rekenmachine.

Afbeelding met lijn, diagram, Perceel, Lettertype

Automatisch gegenereerde beschrijving**Oplossing:** x =

x =

x = 12

cos =

tan =

**Startoefeningen**

**Oefening 2:** vul in met = of ≠. Verklaar indien ze niet gelijk zijn.

1. sin 52° + cos 52° \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. sin² 46° + cos² 46° \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. (cos 17°)² + (sin 17°)² \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
4. (sin 25° + cos 25°)² \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
5. cos² 63° + sin² 63° \_\_\_\_\_ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Oefening 3:** bestaat er een scherpe hoek waarvoor geldt dat sin = en cos = ?

Verklaar met de grondformule.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

## Oefeningen

**Oefening 4:** Verklaar steunend op de grondformule, waarom:

1. sin² 15° + cos² 35° ≠ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
2. sin³ 48° + cos² 48° ≠ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_
3. (sin 74° + cos 74°)² ≠ 1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Oefening 5:**

1. Als cos α = , bepaal dan de sin α en tan α zonder α te berekenen.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. Als sin α = 0,6 , bepaal dan cos α en tan α zonder α te berekenen.

Zet sin α = 0,6 eerst om in een breuk.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Oefening 6:** vereenvoudig

1. tan . cos =

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. 1 – cos² =

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

1. 2 – cos² – sin² =

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| KUNNEN |  |  |  |
| Goniometrische verhoudingen toepassen |  |  |  |
| Toepassingen in vlakke figuren herkennen |  |  |  |
| Verband tussen sinus, cosinus en tangens |  |  |  |
| Grondformule herkennen |  |  |  |

STUDIEWIJZER Goniometrie

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| KENNEN |  |  |  |
| Sinus =  Cosinus =  Tangens = |  |  |  |
| tan =  tan = |  |  |  |
| sin² + cos² = 1 of cos² + sin² = 1 |  |  |  |